Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n)}.$$

1. *Montrer que (u_n) converge.*
2. *On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (v_n) de terme général : $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge.*
3. *En déduire la limite de (u_n).*

Solution :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie facilement que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant 1$$

par conséquent $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et (u_n) est donc décroissante. La suite (u_n) est de plus positive et donc minorée par 0. Il s'ensuit d'après le théorème de la limite monotone, que (u_n) est convergente.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{n+2}{n+1}\frac{(2n+1)^2}{2^2(n+1)^2} = \frac{4n^3+12n^2+9n+2}{4n^3+12n^2+12n+4} \leqslant 1$$

et (v_n) est décroissante. Elle est aussi minorée par 0 et comme précédemment, on peut alors affirmer qu'elle est convergente.

3. *En partant de l'égalité $v_n = (n+1)u_n^2$, on obtient que $u_n = \sqrt{\dfrac{v_n}{n+1}}$. Comme (v_n) converge, il en est de même de (u_n) et $\boxed{\lim u_n = 0}$.*

Références