Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit (u_n) une suite réelle et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$. La suite (v_n) est la suite des moyennes de Césaro de la suite (u_n) (voir l'exercice **??***).*

1. *On suppose que (v_n) converge. Est-ce que (u_n) converge ?*
2. *Si on suppose que (u_n) est croissante, montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge.*

Solution :

1. *Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

   Il est clair que (v_n) converge. Pourtant (u_n) ne converge pas. La convergence de (v_n) n'implique donc pas celle de (u_n).

2. *Le sens direct consiste en le théorème de Cesáro (voir l'exercice* **??***). Prouvons la réciproque. Supposons que (v_n) converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$.*

   Comme (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, il n'y a que deux possibilités :

   (a) *Si la suite (u_n) est majorée, alors on sait que (u_n) converge vers une limite finie $l' \in \mathbb{R}$. Mais d'après le théorème de Cesáro, (v_n) converge également vers l'. Par unicité de la limite, $l = l'$ et donc (u_n) converge vers l.*

   (b) *Par l'absurde, si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$. A partir d'un certain rang la suite (v_n) est donc positive. Mais d'après l'exercice* **??***, à partir d'un certain rang, on a :*

$$v_{2n} \geqslant \frac{u_n + v_n}{2} \geqslant \frac{u_n}{2}.$$

Donc $v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par application du théorème des gendarmes et nécessairement :* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *ce qui vient contredire notre hypothèse, donc* (u_n) *ne peut être majorée.*

Références