Fonction presque additive, Centrale MP 2001

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

6 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Fonction presque additive, Centrale MP 2001 Centrales MP***

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, F étant complet. Soit f une application continue de E dans F telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall x, y \in E,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M.$$

1. *Dans le cas $M = 0$ montrer que f est linéaire. Ce résultat subsiste-t-il si E et F sont des $\mathbb{C}$-ev ?*
2. *On suppose $M > 0$. Soit pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur E.*
3. *On note $g = \lim_{n\to\infty} f_n$. Montrer que g est une application linéaire continue et que c'est l'unique application linéaire telle que $f - g$ soit bornée.*

Solution :

1. *$f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ par récurrence, puis pour tout $r \in \mathbb{Z}$ par différence, pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par quotient et enfin pour tout $r \in \mathbb{R}$ par densité. Dans le cas de $\mathbb{C}$-ev f est $\mathbb{R}$-linéaire mais pas forcément $\mathbb{C}$-linéaire, ctrex : $z \mapsto \overline{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*
2. *$\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq M2^{-n-1}$ donc la série télescopique $\sum(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est uniformément convergente.*
3. *$\|f_n(x+y) - f_n(x) - f_n(y)\| \leq M2^{-n}$ donc $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leq 0$ et g est continue (limite uniforme des f_n) d'où g est linéaire continue. $\|f(x) - g(x)\| = \|\sum_{k=0}^{\infty}(f_k(x) - f_{k+1}(x))\| \leq 2M$ donc $f - g$ est bornée. Si h est une application linéaire telle que $f - h$ est bornée alors $g - h$ est aussi bornée ce qui entraîne $g = h$ par linéarité.*

Références