Principe du maximum, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

6 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Principe du maximum, ULM-Lyon-Cachan MP* 2005 MP***

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ *et* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *borné. Montrer que* $\sup(|P(x)|,\ x \in U) = \sup(|P(x)|,\ x \in \mathrm{Fr}(U))$.

Solution : *On suppose* P *non constant, sans quoi le résultat est trivial. Soit* $S(X) = \sup(|P(x)|,\ x \in X)$. *On a par inclusion et continuité :* $S(\mathrm{Fr}(U)) \leq S(\overline{U}) = S(U)$. *Soit* $x \in \overline{U}$ *tel que* $|P(x)| = S(\overline{U})$. *On démontre par l'absurde que* $x \in \mathrm{Fr}(U)$, *ce qui entraîne l'égalité demandée. Supposons donc* $x \in U$ *et soit* $n = \deg(P)$. *Alors pour* $\rho > 0$ *suffisament petit, et* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a* $x + \rho e^{i\theta} \in U$ *et :*

$$P(x + \rho e^{i\theta}) = P(x) + \rho e^{i\theta} P'(X) + \cdots + \frac{\rho^n e^{in\theta}}{n!} P^{(n)}(x).$$

avec $P^{(n)}(x) = P^{(n)} \neq 0$. *On en déduit :*

$$2\pi|P(x)| = \left|\int_{\theta=0}^{2\pi} P(x + \rho e^{i\theta})\, d\theta\right| \leq \int_{\theta=0}^{2\pi} |P(x + \rho e^{i\theta})|\, d\theta \leq 2\pi S(U) = 2\pi|P(x)|.$$

On en déduit que les inégalités sont des égalités, et en particulier que la quantité $|P(x+\rho e^{i\theta})|$ *est indépendante de* ρ *et* θ. *Il y a contradiction car* $|P(x+\rho e^{i\theta})|^2$ *est un polynôme de degré* $2n$ *en* ρ.

Références