

# Une application polynomiale est fermée, ULM-Lyon-Cachan MP\* 2005

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

**Exercice 0.1 ★★** Une application polynomiale est fermée, ULM-Lyon-Cachan MP\* 2005 MP

Soit  $f$  une fonction polynomiale sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que l'image par  $f$  de tout fermé est un fermé.

**Solution :** Si  $f$  est constante c'est évident. Sinon, on a facilement  $|f(z)| \rightarrow_{|z| \rightarrow \infty} \infty$ . Considérons un fermé  $F$  et une suite  $(f(z_n))$  d'éléments de  $f(F)$  convergeant vers  $Z \in \mathbb{C}$ . D'après la remarque, la suite  $(z_n)$  est bornée, elle admet une valeur d'adhérence  $z \in F$  et  $Z = f(z) \in f(F)$ . Remarque : ce résultat est faux pour une fonction polynomiale sur  $\mathbb{C}^p$  avec  $p \geq 2$ , prendre par exemple  $f(x, y) = x$  sur  $\mathbb{C}^2$  et  $F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \text{ tq } xy = 1\}$ .

## Références