Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit (u_n) *la suite de terme général :* $u_n = (1+a)\left(1+a^2\right)\dots(1+a^n)$ *avec* $0 < a < 1$.

1. *Étudier les variations de cette suite.*
2. *Prouver l'inégalité :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leqslant e^x$$
3. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

Solution :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+a^{n+1}\right) > 1$ *donc* (u_n) *est croissante.*
2. *Il suffit d'étudier la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - (1+x) \end{array} \right.$.
3. *Appliquant* n *fois l'inégalité précédente avec succssivement* $x = a$, $x = a^2$, ...,$x = a^n$ *on obtient :*
$$u_n = (1+a)\left(1+a^2\right)\dots(1+a^n) < e^a e^{a^2} e^{a^3} \dots e^{a^n} = e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} \leqslant e^{\frac{a}{1-a}}$$
La suite (u_n) *est donc majorée et en appliquant le théorème de la limite monotone, on en déduit que* (u_n) *converge.*

Références