Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

En utilisant le théorème de la limite monotone, prouver la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$$

Solution : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+1)\,(n+1)} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n.n}\right) \\
= & \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\
= & \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\frac{-1}{n\,(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
\leqslant & -\frac{1}{n\,(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
\leqslant & \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \\
\leqslant & 0
\end{aligned}$$

car $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geqslant 1$. Donc (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 et donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Références