$x/\max(1, \|x\|)$, Centrale MP 2005

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $x/\max(1, \|x\|)$***, Centrale MP 2005 Centrales MP***

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Solution : *Pour $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.*

Pour $\|x\| \leq 1 < \|y\|$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| + \left\|y - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| = \|x - y\| + \|y\| - 1 \leq \|x - y\| + \|y\| - \|x\| \leq 2\,\|x - y\|$.

Pour $1 < \|x\| \leq \|y\|$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\dfrac{y}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| \leq \dfrac{\|x - y\| + \|y\| - \|x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{2\,\|x - y\|}{\|x\|}$.

Remarque : dans le cas où la norme est euclidienne, $f(x)$ est le projeté de x sur la boule unité, c'est-à-dire le point de la boule unité le plus proche de x. Dans ce cas, f est 1-lipschitzienne. Dans le cas d'une norme non euclidienne on peut avoir $\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\|$, par exemple avec $x = (1, 1)$ et $y = (1/2, \frac{3}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $\| \ \|_\infty$.

Références