Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

On considère une suite (u_n) *vérifiant :*

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrez que la suite (u_n) *est convergente, et déterminez sa limite.*

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Posons* $k = E(\sqrt{n})$. *D'après l'énoncé, on obtient l'encadrement*

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{E(\sqrt{n})}{n} + \frac{1}{E(\sqrt{n})}$$

Mais puisque $E(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$, *on obtient l'encadrement*

$$\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}$$

Donc, on a l'encadrement suivant pour u_n *valable pour* $n \geqslant 2$ *:*

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$$

Si $n \geqslant 4$, $\sqrt{n} - 1 \geqslant \sqrt{n}/2$ *et donc,*

$$\forall n \geqslant 4, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Puisque la suite $(3/\sqrt{n})$ *converge vers* 0, *et que* $\forall n \geqslant 4$, $|u_n| \leqslant 3/\sqrt{n}$, *par le théorème de majoration, on en déduit que la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Références