Mines MP 2000

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Mines MP 2000 Mines-Ponts MP***

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = {}^tAA$. A est-elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, dans $M_n(\mathbb{C})$?

Solution : *${}^tAA$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples. A annule le polynôme $P(X^3)$, donc est $\mathbb{C}$-diagonalisable si 0 n'est pas racine de P ce que l'on peut imposer si A est inversible. Si A n'est pas inversible, soit $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.*

On a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A^3) \oplus \mathrm{Ker}(Q(A^3))$ et $\mathrm{Ker}(A^3) = \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ donc $AQ(A^3) = 0$ et A est encore $\mathbb{C}$-diagonalisable. Contre-exemple pour la $\mathbb{R}$-diagonalisabilité : prendre une rotation d'angle $2\pi/3$ dans le plan.

Références