Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la suite (u_n) donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{np}$$

où p est un entier strictement positif fixé.

1. *Montrer que :*
$$\forall x \in \left]0,1\right[, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$
2. *En déduire que :*
$$\forall x > 1, \quad \ln \frac{x+1}{x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln \frac{x}{x-1}$$
3. *En déduire la limite de (u_n) puis qu'elle est convergente et donner sa limite.*

Solution :

1. *Il suffit d'étudier les fonctions* $f : \left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - (1+x) \end{array}\right.$ *et* $g : \left\{\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x)\,e^x - 1 \end{array}\right.$
2. *Soit $x > 1$. On a donc $\frac{1}{x} \in \left]0,1\right[$ et, par application de l'inégalité précédente, il vient que :*

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{x} \leqslant e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \\ \iff & \frac{x+1}{x} \leqslant e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{x}{x-1} \\ \iff & \ln \frac{x+1}{x} \leqslant \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \leqslant \ln \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

3. *Pour tout* $k \in [\![0, np-n]\!]$*, en appliquant l'inégalité précédente à* $x = n+k \geqslant 1$*, on obtient :*

$$\ln \frac{n+k+1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln \frac{n+k}{n+k-1}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$$

Sommons maintenant ces inégalités pour k *variant de* 0 *à* $np-n$*. On reconnaît des sommes télescopiques et on obtient :*

$$\ln(np+1) - \ln n \leqslant u_n \leqslant \ln np - \ln(n-1)$$

Mais $\ln(np+1) - \ln n = \ln\left(p + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln p$ *et* $\ln np - \ln(n-1) = \ln \dfrac{np}{n-1} = \ln \dfrac{n}{n} \dfrac{p}{1 - \dfrac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln p$*. Enfin, par application du théorème des gendarmes, on obtient :* $\boxed{u_n n{+}\infty \ln p}$

Références