Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que :* $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. *En déduire la limite de la suite de terme général*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

Solution :

1. *L'inégalité se montre en étudiant les deux fonctions* f *et* g *données par* $f(x) = \ln(1+x) - x$ *et* $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. *Puisque* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, *introduisons la suite* (v_n) *de terme général* $v_n = \ln u_n$. *Alors*

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

et en utilisant l'encadrement construit dans la première question,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

et donc, comme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *et que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ *(voir exercice* **??** *page* **??***), il vient que :*

$$\frac{(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{(n+1)}{2n}$$

On conclut en appliquant le théorème des gendarmes, $\boxed{v_n \to \dfrac{1}{2}}$ *et donc* $\boxed{u_n \to \sqrt{e}}$.

Références