ENS 2014

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***ENS 2014 ENS***

Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique laissant stable tous les sev $\mathbb{R}_n[X]$ (considérés comme des sous-espaces de E). Montrer qu'il existe une famille échelonnée (P_n) de polynômes propres pour u telle que pour toute fonction $f \in E$, on ait $f = \sum_{n=0}^{\infty}(P_n|f)P_n$.

Solution : *$u_{|\mathbb{R}_n[X]}$ est symétrique et laisse stable $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc aussi son orthogonal dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension 1. Soit P_n un polynôme de norme 1 dans cet orthogonal. Par construction, P_n est propre pour u, de degré n et la suite (P_n) est orthonormale. C'est une suite totale car $\mathbb{R}[X]$ est dense dans E pour $\| \ \|_\infty$ donc aussi pour $\| \ \|_2$.*

Références