

Comparaison de valeurs propres

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Comparaison de valeurs propres

Soient E un espace euclidien, $h \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, $x_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale sur $\text{vect}(x_0)$, et $f = h + p$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ celles de f .

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Solution : Soit (h_i) une base diagonale pour h , $H_i = \text{vect}\{h_1, \dots, h_i\}$ et (f_i) , F_i idem pour f .

Pour $x \in F_k \cap H_{k-1}^\perp$, $\lambda_k \|x\|^2 + (x|x_0)^2 \leq (h(x)|x) + (x|x_0)^2 = (f(x)|x) \leq \mu_k \|x\|^2$.

Pour $x \in H_{k+1} \cap F_{k-1}^\perp \cap x_0^\perp$, $\mu_k \|x\|^2 \leq (f(x)|x) = (h(x)|x) \leq \lambda_{k+1} \|x\|^2$.

Références