Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit x un réel, étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \text{ avec } n \geqslant 1.$$

Solution : *Soit $n \geqslant 1$. De la même façon que dans l'exercice* **??**, *on montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $kx - 1 \leqslant \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$. Il vient alors que :*

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kx$$

ce qui s'écrit aussi, en reconnaîssant des sommes arithmétiques :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}x$$

On montre facilement que $\frac{n(n+1)}{2n^2}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{x}{2}$. *Par application du théorème d'encadrement, on montre que* $\boxed{u_n n{+}\infty \frac{x}{2}}$.

Références