

Endomorphismes normaux

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ **Endomorphismes normaux**

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

1. Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors F^\perp est stable par u .
En déduire que u est diagonalisable en base orthonormale. La réciproque est-elle vraie?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
 - (1) u est normal.
 - (2) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - (3) Tout sev stable par u est stable par u^* .
 - (4) Si un sev F est stable par u alors F^\perp est stable par u .
 - (5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

Références