Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Étudiez les suites de terme général

$$u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \text{ et } v_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{x}$$

Solution : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ ce qui amène : $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient l'encadrement suivant de u_n :*

$$x - \frac{1}{n} < u_n \leqslant x.$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes que (u_n) converge vers x. L'étude de (v_n) est similaire, mais il faut distinguer deux cas :

1. *Si $x > 0$, alors*
$$v_n > n - \frac{1}{x}$$
et donc (v_n) diverge vers $+\infty$ d'après le théorème des gendarmes.
2. *Si $x < 0$, alors*
$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx \Rightarrow \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \geqslant n$$
(on change les inégalités en les multipliant par un réel négatif!) Ici aussi, (v_n) diverge vers $+\infty$.

Références