Développement en série de cotan, Centrale MP 2011

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Développement en série de*** cotan***, Centrale MP 2011 Centrales MP***

Soit $f : x \mapsto \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} \dfrac{1}{k+x}\right)$.

1. *Quel est le domaine de définition de* f *?*
2. *Montrer que, pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *:*
   - (a) $f(-x) = -f(x)$.
   - (b) $f(x+1) = f(x)$.
   - (c) $f(2x) = 1/2(f(x+1/2) + f(x))$.
3. *Montrer que* $x \mapsto f(x) - \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ *admet un prolongement par continuité à* $\mathbb{R}$ *entier.*
4. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x) = \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$.

Solution :

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *et* $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2 - k^2}$.
2. (a) *La formule ne marche que si* $2x$ *n'est pas entier.*
3. $f(x) - 1/x$ *et* $\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x) - 1/x$ *se prolongent par continuité en* 0 *(avec des limites nulles), donc la différence aussi. Par 1-périodicité, cette différence se prolonge par continuité à* $\mathbb{R}$ *entier.*
4. *Soit* $g(x) = f(x) - \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$ *pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ *et* $g(x) = 0$ *pour* $x \in \mathbb{Z}$ *:* g *est continue, vérifie la relation fonctionnelle* $g(2x) = 1/2(g(x+1/2) + g(x))$ *pour* $x \in \mathbb{R} \setminus 1/2\mathbb{Z}$*, et donc aussi pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par continuité. On en déduit* $g(x) = 0$ *pour* $x \in 1/2\mathbb{Z}$*, puis pour tout* $x \in \mathbb{Z}[1/2]$ *et enfin pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par densité.*

Références