Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Recherche d'équivalents, Centrale MP 2006 Centrales MP***

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 *de* $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ *et* $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$.

Solution : *On a* $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{dt}{\operatorname{sh} t} \leq xS_1(x) \leq \dfrac{x}{\operatorname{sh} x} + \int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{dt}{\operatorname{sh} t}$ *et* $\dfrac{1}{\operatorname{sh} t} = \dfrac{1}{t} + O(t)$ *donc* $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{dt}{\operatorname{sh} t} = -\ln(x) + O(1)$. *On en déduit* $S_1(x) \sim -\dfrac{\ln x}{x}$. *La même méthode ne marche pas pour* S_2 *car le terme résiduel,* $\dfrac{x}{\operatorname{sh}^2(x)}$ *n'est pas négligeable devant* $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{dt}{\operatorname{sh}^2(t)}$. *Par contre, on peut remarquer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$, *d'où* $S_2(x) \sim \dfrac{\zeta(2)}{x^2}$.

Références