Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k^2}{n^3 + k^2}$$

Solution : *Pour tout* $k \in [\![1, n^2]\!]$, $\dfrac{k^2}{n^3 + k^2} \geqslant \dfrac{k^2}{n^3 + n^4}$ *donc*

$$\frac{1}{n^3 + n^4} \sum_{k=1}^{n^2} k^2 \leqslant u_n.$$

Mais d'après l'exercice **??**, $\sum_{k=1}^{n^2} k^2 = \frac{n^2(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$ *donc*

$$u_n \geqslant \frac{n^2(n^2 + 1)(2n^2 + 1)}{6(n^3 + n^4)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

On en déduit grâce au théorème des gendarmes que $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$.

Références