Centrale MP 2002

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Centrale MP 2002 Centrales MP***

On pose $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z}) = \inf\{|x - n| \text{ tq } n \in \mathbb{Z}\}$.

1. *Montrer que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$ est définie et continue.*
2. *Montrer que φ est lipschitzienne. Que peut-on en déduire pour f ?*
3. *Montrer que f n'est dérivable en aucun point.*

Solution :

1. *La série converge normalement et φ est continue.*
2. *φ est 1-lipschitzienne, mais on ne peut rien en déduire pour f :*
   pour N fixé et $0 < h \leq \dfrac{1}{2.4^n}$, on a $|f(h) - f(0)| = f(h) \geq \sum_{n=1}^{n} 3^n h = \dfrac{3^{N+1} - 3}{2} h$ donc f n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.
3. *D'après ce qui précède, le taux d'accroissement de f en 0 est arbitrairement grand, donc f n'est pas dérivable en 0. On montre de même que f n'est pas dérivable en $x \in \mathbb{R}$.*

Références