

$f(nx)$, $f(x/n)$ et convergence simple

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $f(nx)$, $f(x/n)$ et convergence simple

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.
On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f(x/n)$.

1. Donner un exemple de fonction f .
2. Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R}_+ .
3. Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t) dt$ converge, chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t) dt$.

Références