Centrale MP 2001

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Centrale MP 2001 Centrales MP***

1. *Développer, pour tout $x > 0$, $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$ en série de fractions rationnelles.*
2. *Montrer qu'en 0_+, $s(x)$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$.*

Solution :

1. $s(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,\mathrm{d}t$.

   On a $|\sin(t)e^{-kxt}| \leq te^{-kxt}$ *et* $\int_{t=0}^{+\infty} te^{-kxt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$ *donc* $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{+\infty} |\sin(t)e^{-kxt}|\,\mathrm{d}t$ *converge ce qui légitime l'interversion intégrale-série. D'où* $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-kxt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2x^2+1}$.

2. *Sachant (?) que* $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
xs(x) - \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \Big(\frac{x\sin t}{e^{xt}-1} - \frac{\sin t}{t}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{u=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\Big)\sin\Big(\frac{u}{x}\Big)\,du \\
&= -x\Big[\underbrace{\Big(\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\Big)}_{\to_{u\to 0_+} -\frac{1}{2}}\cos\Big(\frac{u}{x}\Big)\Big]_{u=0}^{+\infty} + x\int_{u=0}^{+\infty} \underbrace{\Big(\frac{-e^u}{(e^u-1)^2} + \frac{1}{u^2}\Big)}_{\to_{u\to 0_+} \frac{1}{12}}\cos\Big(\frac{u}{x}\Big)\,du \\
&= x(\text{quantité bornée}) \to_{x\to 0_+} 0.
\end{aligned}$$

Références