Suite d'intégrales, Centrale MP 2004

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Suite d'intégrales, Centrale MP 2004 Centrales MP***

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de fonctions définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \left(\dfrac{x+x^n}{2}\right)^n$.

1. *Montrer que* (f_n) *converge simplement vers une fonction* φ.
2.
   (a) *La convergence est-elle uniforme ?*
   (b) *La convergence est-elle monotone ?*
3. *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_{x=0}^{1} f_n(x)\ \mathrm{d}x$. *Montrer que* $J_n \sim \dfrac{2}{n^2}$.

Solution :

1. $0 \le f_n(x) \le x^n$ et $f_n(1) = 1$ donc $f_n(x) \to_{n\to\infty} \begin{cases} 0 & si x<1 \\ 1 & si x=1. \end{cases}$
2. (a) *Non, la continuité n'est pas conservée.*
   (b) *Oui, il y a décroissance évidente.*
3. *Changement de variable* $u = \left(\dfrac{1+x^{n-1}}{2}\right)^n$: $J_n = \dfrac{2}{n(n-1)} \int_{u=1/2^n}^{1} (2u^{1/n}-1)^{2/(n-1)} u^{1/n}\, du$ *et l'intégrale tend vers* 1 *quand* $n \to \infty$ *par convergence dominée.*

Références