Mines MP 2012

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Mines MP 2012 Mines-Ponts MP***

Déterminer la limite pour $n \to \infty$ de $\int_{x=0}^{+\infty} x^{-1/n}(1+x/n)^{-n}\ \mathrm{d}x$.

Solution : *L'intégrande tend simplement vers e^{-x} ; il reste à dominer. Pour $x \geq 0$ on a*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

Cette expression est une fonction croissante de n à x fixé. Ainsi, $(1+x/n)^n \geq (1+x/3)^3$ pour $n \geq 3$, puis $0 \leq x^{-1/n}(1+x/n)^{-n} \leq \max(1,x)(1+x/3)^{-3}$, quantité intégrable. La limite demandée est donc $\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x}\ \mathrm{d}x = 1$.

Références