Centrale MP 2000

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Centrale MP 2000 Centrales MP***

Domaine de définition de $I(\alpha) = \int_{x=0}^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$. *Calculer* $I(2)$ *et* $I(3)$. *Déterminer la limite de* $I(\alpha)$ *en* $+\infty$.

Solution : $I(\alpha)$ *est définie pour tout* $\alpha > 1$. $I(2) = (x = e^u) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{2u}}{(1+e^{2u})^2}\,du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{u}{(e^u+e^{-u})^2}\,du = 0$ *(parité).* $I(3) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \int_{u=0}^{+\infty} \frac{-u(e^u-e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^3}\,du = \left[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})^2}\right]_{u=0}^{+\infty} - \int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{2(e^u+e^{-u})^2} = -\int_{u=0}^{+\infty} \frac{e^{2u}\,du}{2(1+e^{2u})^2} = \left[\frac{1}{4(1+e^{2u})}\right]_{u=0}^{+\infty} = -\frac{1}{8}$.
$I(\alpha) \to_{\alpha\to+\infty} 0$ *par convergence dominée.*

Références