

$$\left(\int f^x\right)^{1/x}$$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $\left(\int f^x\right)^{1/x}$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\int_{t=a}^b (f(t))^x dt\right)^{1/x}$.

1. Montrer que $\varphi(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \max(f)$.

2. On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\varphi(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt\right)$.

Solution :

1. Soit $\varepsilon > 0$: Pour x assez petit, $|f(t)^x - 1 - x \ln(f(t))| \leq \varepsilon x$ car $\ln f$ est borné sur $[a, b]$.

Donc $\left| \int_{t=a}^b f(t)^x dt - 1 - x \int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt \right| \leq \varepsilon x$, et

$$\left| \ln \left(\int_{t=a}^b f(t)^x dt \right) - x \int_{t=a}^b \ln(f(t)) dt \right| \leq 2\varepsilon x.$$

Références