Divergence de $(\cos n)$

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 avril 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Divergence de*** $(\cos n)$

Montrer que la suite $(\cos(n))$ *diverge.*

Solution : *Supposons que* $(\cos n)$ *converge vers une limite* $\ell \in \mathbb{R}$*. La sous-suite* $(\cos(2n))$ *converge donc vers la même limite* ℓ*. Or* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos 2n = 2\cos^2 n - 1$*, donc en passant à la limite, on obtient :* $\ell = 2\ell^2 - 1$*. Donc on a nécessairement* $\ell = -1/2$ *ou* $\ell = 1$*. D'autre part,* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos n \cos 1$*. Un nouveau passage à la limite donne cette fois :* $2\ell = 2\cos 1.\ell$ *donc* $\ell = 0$*, puisque* $\cos 1 \neq 1$*. On a donc d'une part* $\ell = -1/2$ *ou* $\ell = 1$ *et d'autre part* $\ell = 0$*. Ces deux conditions sont incompatibles, donc l'hypothèse de départ, à savoir* $(\cos n)$ *converge, ne tient pas.*

Références