Centrale MP 2010

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ **Centrale MP 2010 Centrales MP**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable. On définit la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{1}{x}\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$.

1. *Prolonger par continuité la fonction g en 0.*
   (a) *Montrer que, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $\int_{t=a}^{b} g^2(t)\,dt = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,dt$.*
   (b) *Montrer que $\int_{t=a}^{b} g^2(t)\,dt \le ag^2(a) + 2\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*
   (c) *En déduire que $\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^{+\infty} f^2 + ag^2(a)\right)^{\frac{1}{2}}$.*
2. *Montrer que g est de carré intégrable et que fg est intégrable.*

Solution :

1. *$g(0) = f(0)$.*
   (a) *$\dfrac{d(xg(x))}{dx} = f(x)$, soit $xg'(x) = f(x) - g(x)$ et $\dfrac{d(xg^2(x))}{dx} = g^2(x) + 2xg'(x)g(x) = f(x)g(x) - g^2(x)$.*
   (b) *On pose $\alpha = ag^2(a)$, $\beta = \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\gamma = \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*
   Donc $\gamma^2 \le \alpha + 2\beta\gamma$, soit $(\gamma - \beta)^2 \le \alpha + \beta^2$, ce qui donne l'inégalité demandée.
2. *$\int_0^b g^2$ est majorée indépendamment de b, donc $\int_0^{+\infty} g^2$ converge. f et g étant de carrés intégrables, fg est intégrable d'après l'inégalité $2|fg| \le f^2 + g^2$.*

Références