Centrale MP 2001

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Centrale MP 2001 Centrales MP***

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que ff'' et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$, que f est uniformément continue et qu'elle tend vers zéro en $+\infty$.

Solution : *$2|ff''| \leq f^2 + f''^2$ donc ff'' est intégrable. On en déduit que f'^2 admet une limite finie en $+\infty$, et cette limite est nulle sans quoi f^2 ne serait pas intégrable (si $f'(x) \to_{x\to+\infty} l$ alors $f(x)/x \to_{x\to+\infty} l$). Ainsi f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, f est lipschitzienne et donc uniformément continue. De plus,*

$$\int_{t=0}^{X} f'^2(t)\,dt = f(X)f'(X) - f(0)f'(0) - \int_{t=0}^{X} f(t)f''(t)\,dt$$

donc $f(X)f'(X)$ admet en $+\infty$ une limite finie ou $+\infty$, et le cas $f(X)f'(X) = \frac{1}{2}(f^2)'(X) \to_{x\to+\infty} +\infty$ contredit l'intégrabilité de f^2 donc ce cas est impossible, ce qui prouve que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, ff' est intégrable (produit de deux fonctions de carrés intégrables) donc f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et cette limite vaut zéro par intégrabilité de f^2.

Références