Comparaison série-intégrale, Mines 2013

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Comparaison série-intégrale, Mines 2013 Mines-Ponts***

A partir du développement de Taylor avec reste intégral de $f(x) = \int_{t=1}^{x} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt$, *étudier la convergence de* $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$. *Même question pour* $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Solution : *Indication peu claire...*

On écrit $f(n+1) = f(n)+f'(n)+\int_{t=n}^{n+1}(n+1-t)f''(t)\,dt$ *et* $f''(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}} - \frac{\sin\sqrt{t}}{t^2} = O(1/t^{3/2})$ *avec une constante indépendante de* t *pour* $t \geq 1$. *Ainsi,* $\frac{\sin\sqrt{n}}{n} = f(n+1) - f(n) + O(1/n^{3/2})$. *L'intégrale généralisée* $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt$ *est convergente : écrire* $\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ *puis intégrer par parties, donc la série de terme général* $f(n+1) - f(n)$ *est convergente et par addition, la série* $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ *converge. Considérons à présent* $g(x) = \int_{t=1}^{x} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{u=1}^{x} \frac{1}{2}\cos u\,du = \frac{1}{2}(\sin\sqrt{x} - \sin 1)$.

On a $g'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $g''(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2x} + O(1/x^{3/2})$ *et* $g'''(x) = O(1/x^{3/2})$,

d'où $\frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = g(n+1) - g(n) + \frac{\sin\sqrt{n}}{4n} + O(1/n^{3/2})$. *Ainsi, les séries* $\sum(g(n+1) - g(n))$ *et* $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ *ont même nature. Si elles convergent, alors la suite* $(g(n))$ *admet une limite finie et donc aussi la fonction* g *en* $+\infty$ *car* $g(x) = g(n) + O(1/\sqrt{n})$ *pour* $n \leq x < n+1$, *vu* g'. *Or* g *n'a pas de limite en* $+\infty$, *donc la série* $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ *est divergente.*

Références