

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \left(\frac{\sin n}{3}\right)^n$

4. $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$

2. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\right)$ où $n > 0$

5. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

3. $u_n = \sqrt{1 - 3n + n^2}$ où $n > 2$.

6. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left(\frac{|\sin n|}{3}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc par application du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par opérations sur les limites.

3. $u_n = \sqrt{1 - 3n + n^2} = n\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n} + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par opérations sur les limites.

4. Pour tout $n > 1$, $-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin n}{n+1} \leq \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}} \leq \frac{\sin n}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ donc par application du théorème des gendarmes $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

5. Pour tout $n \geq 0$, $\sqrt[n]{1} \leq u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n} \leq \sqrt[n]{3}$ et $\sqrt[n]{3} = e^{\frac{\ln 3}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^0 = 1$ donc par application du théorème des gendarmes $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

6. Pour tout $n \geq 2$, $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \leq \frac{n+1}{n-1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ donc par application du théorème des gendarmes $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Références