Valeur moyenne sur le segment $x-1,\ x+1$

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ **Valeur moyenne sur le segment $x-1,\ x+1$**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{t=-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. On pose $F(x) = 1/2 \int_{t=x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.
Montrer que $\int_{t=-\infty}^{+\infty} F(t)\,dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.
Démontrer le même résultat en supposant seulement la convergence de $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$

Solution : $\int_{t=a}^{b} F(t)\,dt = 1/2 \int_{u=a-1}^{a+1} (u-(a-1))f(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + 1/2 \int_{u=b-1}^{b+1} (b+1-u)f(u)\,du$.

$$= \varphi(a+1) - 1/2 \int_{u=a-1}^{a+1} \varphi(u)\,du + \int_{u=a+1}^{b-1} f(u)\,du + 1/2 \int_{u=b-1}^{b+1} \varphi(u)\,du - \varphi(b-1)$$

où φ est une primitive de f.

Références