

$$(f(ax) - f(x))/x$$

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $(f(ax) - f(x))/x$

1. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} l$ et $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} L$ avec $l, L \in \mathbb{R}$.

Pour $a > 0$, établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt$.

2. Application : Calculer $\int_{t=0}^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

Solution :

$$1. \int_{t=x}^y \frac{f(at)}{t} dt = \int_{t=ax}^{ay} \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_{t=x}^y \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = \int_{t=ax}^x \frac{f(t)}{t} dt + \int_{t=y}^{ay} \frac{f(t)}{t} dt.$$

$$\text{On obtient } \int_{t=0}^{+\infty} \frac{f(at) - f(t)}{t} dt = (L - l) \ln a.$$

$$2. I = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \ln 2.$$

Références