

$$x(f(x) - f(x + 1))$$

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

**Exercice 0.1** ★★  $x(f(x) - f(x + 1))$

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction décroissante telle que  $\int_{t=1}^{+\infty} f(t) dt$  converge.

Montrer que  $xf(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ , puis que  $\int_{t=1}^{+\infty} t(f(t) - f(t + 1)) dt$  converge, et calculer la valeur de cette intégrale.

**Solution :**  $0 \leq xf(x) \leq 2 \int_{t=x/2}^x f(t) dt \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$ .

$\int_{t=1}^x t(f(t) - f(t+1)) dt = \int_{t=1}^2 tf(t) dt + \int_{t=2}^x f(t) dt - \int_{t=x}^{x+1} (t-1)f(t) dt \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \int_{t=1}^2 tf(t) dt + \int_{t=2}^{+\infty} f(t) dt$ .

## Références