Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ *où* $n > 0$
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ *où* $n > 0$.
4. $u_n = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$ *où* $n > 0$.
5. $u_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$ *où* $n > 0$.
6. $u_n = \ln(e^n + 1) - n$

Solution :

1. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} = \frac{n}{n}\dfrac{2+\frac{(-1)^n}{n}}{5+\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{5}$
2. $u_n = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par opérations sur les limites.*
3. $u_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites.*
4. *On a déjà montré que* $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *donc, comme* $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos 0 = 1$, $u_n = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$
5. $u_n = \frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n}\dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par opérations sur les limites.*
6. $u_n = \ln(e^n+1) - n = \ln\left(e^n\left(1+e^{-n}\right)\right) - n = \ln\left(1+e^{-n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites.*

Références