Comparaison série-intégrale

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Comparaison série-intégrale***

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On pose, sous réserve de convergence, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nt)$ pour $t > 0$.

1. *Si f est monotone et intégrable, montrer que $g(t)$ existe pour tout $t > 0$ et que l'on a : $tg(t) \to_{t\to 0_+} \int_{u=0}^{+\infty} f(u)\,du$.*
2. *Même question en supposant f de classe $\mathcal{C}^1$ et f, f' intégrables.*
3. *On suppose maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$ et f, f', f'' intégrables.*
   Montrer que $g(t) = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} f + 1/2 f(0) + \mathrm{O}_{t\to 0_+}(t)$.

Solution :

1. *en supposant f positive décroissante, $\int_0^{+\infty} f \le tg(t) \le tf(0) + \int_0^{+\infty} f$.*
2. *$\int_{u=pt}^{qt} f(u)\,du - \sum_{n=p}^{q-1} tf(nt) = \int_{u=pt}^{qt}(f(u) - f(t[u/t]))\,du = \int_{v=pt}^{qt} t(1 - \{v/t\})f'(v)\,dv \to_{p,q\to\infty} 0$.*
   Donc la série de terme général $tf(nt)$ est de Cauchy ; elle converge.
   On a alors $\int_0^{+\infty} f - tg(t) = \int_{v=0}^{+\infty} t(1 - \{v/t\})f'(v)\,dv \to_{t\to 0_+} 0$.
3. *$\int_0^{+\infty} 2f - 2tg(t) = \int_{u=0}^{+\infty} 2t(1 - \{u/t\})f'(u)\,du = tf(0) - \int_{u=0}^{+\infty} t^2\{u/t\}(1 - \{u/t\})f''(u)\,du$.*

Références