

# Étude de convergence

Michel Quercia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 juin 2024

## Exercice 0.1 ★★ Étude de convergence

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$
- $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$
- $\int_{t=0}^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t} dt$
- $\int_{t=e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)}$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) dt$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right) dt$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$
- $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t^2) dt$
- $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{\arccos t}$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha} dt$
- $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t) dt}{(t^2-1)^\alpha}$
- $\int_{t=0}^1 \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha} dt$
- $\int_{t=0}^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{t}}) dt$
- $\int_{t=0}^1 \sin(1/t) e^{-1/t} t^{-k} dt$

### Solution :

- $\int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}} \text{ cv}$
- $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ dv}$
- $\int_{t=0}^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t} dt \text{ cv ssi } \alpha > -1$
- $\int_{t=e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln \ln t)} \text{ dv}$
- $\int_{t=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right) dt \text{ dv}$

6.  $\int_{t=0}^{+\infty} \left( 2 + (t+3) \ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right) \right) dt$  cv
7.  $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$  cv ssi  $\alpha > 1$
8.  $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$  dv
9.  $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$  cv ssi  $\alpha < \beta < \min(1, 1+\alpha)$  ou  $\alpha = 0$
10.  $\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t^2) dt$  cv
11.  $\int_{t=0}^1 \frac{dt}{\arccos t}$  cv
12.  $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha} dt$  dv
13.  $\int_{t=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t) dt}{(t^2-1)^\alpha}$  cv ssi  $0 < \alpha < 1$
14.  $\int_{t=0}^1 \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha} dt$  cv ssi  $\alpha < \beta + 1$
15.  $\int_{t=0}^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-1/\sqrt{t}}) dt$  cv ssi  $-1 < \alpha < -1/2$
16.  $\int_{t=0}^1 \sin(1/t) e^{-1/t} t^{-k} dt$  cv

## Références