

Intégrales emboîtées

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Intégrales emboîtées

Établir la convergence et calculer la valeur de $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{t=x}^{+\infty} \sin(t)/t \, dt \, dx$.

Solution :

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^X \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \, dx &= \left[x \int_{t=x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \right]_{x=0}^X + \int_{x=0}^X \sin x \, dx \\ &= X \int_{t=X}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt + 1 - \cos X \\ &= X \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_{t=X}^{+\infty} - X \int_{t=X}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt + 1 - \cos X \\ &= -X \left[\frac{\sin t}{t^2} \right]_{t=X}^{+\infty} - X \int_{t=X}^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^3} \, dt + 1 \\ &\rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Références