Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *et* $n > 0$.
2. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ *où* $n > 0$.
3. $u_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$
4. $u_n = \frac{4.(0.5)^n-2}{(0.5)^n+3}$
5. $u_n = \frac{n^5}{5^n}$
6. $u_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$

Solution :

1. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$. *Mais* $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = a\dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}$ *et* $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc :* $n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ *et* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a$.
2. $u_n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites et car* $\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\frac{1}{2} < 0$.
3. $u_n = \sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 0 & \text{si } 3|n \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } 3|n+1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } 3|n+2 \end{cases}$. *On peut donc extraire de* (u_n) *trois sous-suites qui convergent vers des valeurs différentes. Par conséquent,* (u_n) *diverge.*
4. $u_n = \frac{4.(0.5)^n-2}{(0.5)^n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2}{3}$ *par opérations sur les limites et car* (0.5^n) *est une suite géométrique de raison* $0.5 \in \left]-1,1\right[$.
5. $u_n = \frac{n^5}{5^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par croissances comparées (voir le théorème* **??** *page* **??***).*
6. *On a* $\frac{sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *et* $\frac{\pi}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc* $u_n = 2^n\sin\frac{\pi}{2^n} = \pi\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$

Références