Intégrale de Gauss

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Intégrale de Gauss***

1. *Montrer que pour* $0 \leq x \leq \sqrt{n}$ *on a :* $(1 - \frac{x^2}{n})^n \leq e^{-x^2}$ *et pour* x *quelconque :* $e^{-x^2} \leq (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$.
2. *Calculer les intégrales* $I_n = \int_{t=0}^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n \, dt$ *et* $J_n = \int_{t=0}^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} \, dt$ *en fonction des intégrales :* $K_p = \int_{t=0}^{\pi/2} \cos^p t \, dt$.
3. *On admet que* $K_p \sqrt{\dfrac{\pi}{2p}}$ *quand* $p \to \infty$. *Calculer* $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$.

Solution :

1. $I_n = \sqrt{n} K_{2n+1}$, $J_n = \sqrt{n} K_{2n-1}$.
2. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Références