Constante d'Euler

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Constante d'Euler***

Soit γ la constante d'Euler. Montrer que :

1. $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt = -\gamma$.
2. $\int_{t=0}^{1} \dfrac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt = \gamma$.
3. $\int_{t=0}^{1} \Big(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\ln(1-t)}\Big)dt = \gamma$.

Solution :

1. *On pose* $I_n = \int_{t=0}^{n} (1-t/n)^n \ln t\,dt$:

   en intégrant par parties, on obtient $I_n = \dfrac{n}{n+1}\Big(\ln n - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\Big) \to_{n\to\infty} -\gamma$.

2. $$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,dt &= \int_{t=0}^{1} \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_{t=1}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= \lim_{x\to 0_+} \left(-\ln x - \int_{t=x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) \\ &= \lim_{x\to 0_+} \left((e^{-x}-1)\ln x - \int_{t=x}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt\right) \\ &= -\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt.\end{aligned}$$

3. $\int_{t=x}^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\,dt = (t = -\ln(1-u)) = \int_{u=1-e^{-x}}^{1} \dfrac{-du}{\ln(1-u)}$.

Références