Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,dt$

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ **Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t\,dt$**

1. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.
2. *Montrer que l'intégrale* $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\,dt$ *est comprise entre les intégrales* $A_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\,dt$ *et* $B_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \operatorname{cotan}^2 t \sin^2 nt\,dt$.
3. *Calculer* $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ *et* $A_n - B_n$. *En déduire les valeurs de* A_n *et* B_n *en fonction de* n.
4. *Montrer que* $\frac{I_n}{n} \to_{n\to\infty} J = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ *et donner la valeur de cette dernière intégrale.*

Solution :

1. $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \Rightarrow A_n = \frac{n\pi}{2}$, $A_n - B_n = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ *pour* $n \geq 1$.
2. $J = \frac{\pi}{2}$.

Références