

Calcul, fonctions trigonométriques

Michel Quercia¹

¹Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Calcul, fonctions trigonométriques

Prouver la convergence des intégrales suivantes puis les calculer :

1. $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$
2. $\int_{t=-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2 + \sin t + \cos t}$
3. $\int_{t=0}^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$
4. $\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{3 \tan t + 2}$
5. $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{(a \sin^2 t + b \cos^2 t)^2}$
6. $\int_{t=0}^{\pi/4} \cos t \ln(\tan t) dt$

Solution :

1. $\int_{t=0}^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$
2. $\int_{t=-\pi}^{\pi} \frac{2dt}{2 + \sin t + \cos t} 2\pi\sqrt{2}$
3. $\int_{t=0}^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{2t^2 dt}{1 + t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$
4. $\int_{t=0}^{\pi/2} \frac{dt}{3 \tan t + 2} \frac{\pi + 3 \ln(3/2)}{13}$
5. $\int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{(a \sin^2 t + b \cos^2 t)^2} \frac{\pi(a + b)}{2\sqrt{ab}^3}$
6. $\int_{t=0}^{\pi/4} \cos t \ln(\tan t) dt - \ln(1 + \sqrt{2})$

Références