# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

**Exercice 0.1** ★ **Pas de titre**

*Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :*

1. $u_n = n\cos n + n^2$
2. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ où $n > 0$.
3. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = \frac{3n+\cos n}{n-1}, \quad n \geqslant 2$
5. $u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$ où $n > 0$.
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

**Solution :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\cos n + n^2 \geqslant n^2 - n$ et $n^2 - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc par application du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Mais $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^1 = e$ par opérations sur les limites.
3. $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées (voir le théorème **??** page **??**) et opérations sur les limites.
4. Pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{3n-1}{n-1} \leqslant \frac{3n+\cos n}{n-1} \leqslant \frac{3n+1}{n-1}$ et $\frac{3n-1}{n-1} = \frac{n}{n}\frac{3-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$, $\frac{3n+1}{n-1} = \frac{n}{n}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ donc par application du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$.
5. $u_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{n^3}\dfrac{1+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{\cos n}{n^3}+\frac{1}{n^5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{5}$ par opérations sur les limites.
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car on a affaire à une somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$ (Attention à l'indice de départ de la somme qui n'est pas 0).

## Références