Ens Lyon MP 2012

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Ens Lyon MP 2012 MP***

Soient $S, R \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $S^2 = R^3 = I_n$ et $RS = SR^{-1}$. Montrer que S et R sont simultanément diagonalisables par blocs, avec des blocs de taille 1 ou 2.

Solution : *La propriété est immédiate si $n = 1$ ou $n = 2$. On procède alors par récurrence en supposant la propriété vraie pour tout $k < n$. Soient S et R vérifiant les hypothèses pour n :*

on a $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(R - I_n) \oplus \mathrm{Ker}(R^2 + R + I_n)$ et ces deux sous-espaces sont stables par R et S. En effet, la stabilité par R est évidente et si $RX = X$ alors $RSX = SR^{-1}X = SX$. De même, si $(R^2 + R + I_{n+1})X = 0$, alors $(R^2 + R + I_n)SX = R^2SX + RSX + SX = SRX + SR^2X + SX = S(X + RX + R^2X) = 0$. Si aucun de ces sous-espaces n'est égal à $\mathbb{C}^n$ alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits par les restrictions de R et de S. Si $\mathrm{Ker}(R - I_n) = \mathbb{C}^n$ alors $R = I_n$ et R, S sont simultanément diagonalisables. Si $\mathrm{Ker}(R^2 + R + I_n) = \mathbb{C}^n$, alors $0 = R^2 + R + I_n = (R - jI_n)(R - j^2I_n)$. Soit X tel que $RX = jX$. Alors $RSX = SR^2X = S(-R - I_n)X = S(-j - 1)X = j^2SX$. On en déduit S induit un isomorphisme de $E_j(R)$ sur $E_{j^2}(R)$ (on savait que ces deux sous-espaces étaient de même dimension car R est semblable à R^{-1}. On prend donc $(X_1, X_2, \dots, X_q)$ une base de $E_j(R)$. Alors $(X_1, SX_1, \dots, X_q, SX_q)$ est une base dans laquelle les matrices des endomorphismes représentés par R et S dans la base canonique sont diagonales par blocs, chaque bloc étant de la forme $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$ pour R et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour S.

Références