$\|g - \mathrm{id}\| < 1$, Ulm MP 2012

Michel Quercia[1]

[1]Agrégé, Lycée Carnot, Dijon

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ $\|g - \mathrm{id}\| < 1$***, Ulm MP 2012 MP***

Soit $\| \ \|$ une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $g \in G$: $\|g - \mathrm{id}\| < 1$. Montrer que G est réduit à $\{\mathrm{id}\}$.

Solution : *Soit $g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de g où g est considérée comme une matrice complexe. La suite $(g^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est à valeurs dans G, donc est bornée dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Il en résulte que la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée dans $\mathbb{C}$, soit : $|\lambda| = 1$. De même, $(g - \mathrm{id})^k \to 0$ quand $k \to +\infty$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ puis dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, donc $(\lambda - 1)^k \to 0$, soit : $|\lambda - 1| < 1$ et plus généralement $|\lambda^p - 1| < 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ceci implique $\lambda = 1$. Ainsi 1 est l'unique valeur propre de g. On écrit alors $g = \mathrm{id} + h$ avec h nilpotente, d'où $g^k = \mathrm{id} + kh + \binom{k}{2}h^2 + \cdots + \binom{k}{n-1}h^{n-1}$ est un polynôme en k à valeurs bornées quand k décrit $\mathbb{N}$. Ceci implique $h = 0$ et finalement $g = \mathrm{id}$.*

Références