Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+1}$
3. $u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$
4. $u_n = \sqrt{n^4+n^2} - n^2 - n$
5. $u_n = \frac{2+4(-1)^n}{n}$
6. $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

Solution :

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $-n \leqslant -n\cos^2 n \leqslant 0$ *et donc :* $\dfrac{e^{-n}}{n+1} \leqslant \frac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. *Mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n}}{n+1} = 0$. *Par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $u_n = \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+1} = \dfrac{\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = -\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = -\frac{n}{n}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}$ *par opérations sur les limites.*
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n^2)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $u_n = \sqrt{n^4+n^2}-n^2-n = \dfrac{\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2-n\right)\left(\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n\right)}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n} = \dfrac{-2n^3}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2+n}$ $= \dfrac{n^3}{n^2}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ *par opérations sur les limites.*
5. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{2}{n} \leqslant \frac{2+4(-1)^n}{n} \leqslant \frac{6}{n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0$. *Par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sin(n\pi) = 0$ *et* $u_{2n+1} = (-1)^n$. *On extrait ainsi de* (u_n) *deux suites de nature différentes. Par conséquent,* (u_n) *diverge.*

Références