

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

17 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n^2 - n \ln n}{n^2 + n(\ln n)^2}$

4. $u_n = 4^n - 3^n + 1$

2. $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$

5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. $u_n = \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$

6. $u_n = a^n - (-a)^n$ où $a \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. $u_n = \frac{n^2 - n \ln n}{n^2 + n(\ln n)^2} = \frac{n^2 \frac{1 - \frac{\ln n}{n}}{1 + \frac{(\ln n)^2}{n}}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par application des relations de comparaisons et par opérations sur les limites.

2. $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{n}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$ par opérations sur les limites.

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n \sin n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$ et $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par application du théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. $u_n = 4^n - 3^n + 1 = 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par opérations sur les limites.

5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par opérations sur les limites et car $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ sont des suites géométriques de raison élément de $] -1, 1[$.

6. $u_{2n} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_{2n+1} = 2a^{2n+1}$. Si $|a| \geq 1$, (u_{2n+1}) diverge et les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de natures différentes donc (u_n) diverge. Si $a \in] -1, 1[$, $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 0. D'après le cours, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Références