Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = \frac{n^2 - n\ln n}{n^2 + n(\ln n)^2}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - n$
3. $u_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}$
4. $u_n = 4^n - 3^n + 1$
5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. $u_n = a^n - (-a)^n$ *où* $a \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. $u_n = \frac{n^2 - n\ln n}{n^2 + n(\ln n)^2} = \frac{n^2}{n^2} \dfrac{1 - \frac{\ln n}{n}}{1 + \frac{(\ln n)^2}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par application des relations de comparaisons et par opérations sur les limites.*
2. $u_n = \sqrt{n^2+3n} - n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+3n} + n\right)}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \frac{n}{n} \dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$ *par opérations sur les limites.*
3. *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{n}{n^2+1} \leqslant \frac{n\sin n}{n^2+1} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$ *et* $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $u_n = 4^n - 3^n + 1 = 4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *par opérations sur les limites.*
5. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *par opérations sur les limites et car* $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ *et* $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ *sont des suites géométriques de raison élément de* $]-1,1[$.
6. $u_{2n} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $u_{2n+1} = 2a^{2n+1}$. *Si* $|a| \geqslant 1$, (u_{2n+1}) *diverge et les deux suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont de natures différentes donc* (u_n) *diverge. Si* $a \in]-1,1[$, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Les suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent toutes deux vers* 0. *D'après le cours,* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Références