Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la convergence des suites suivantes, données par leur terme général :

1. $u_n = (-3)^n + 3^n$
2. $u_n = \frac{2^{2n}+n3^n}{2^{2n}-n3^n}$
3. $u_n = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $0 < a < b$.
4. $u_n = \frac{3^n-4}{3^n+2}$
5. $u_n = \frac{\cos n}{n}$
6. $u_n = \frac{-n^2+1}{n^2+3}$

Solution :

1. $u_{2n} = 3^{2n} + 3^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et* $u_{2n+1} = -3^{2n+1} + 3^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *On a ainsi extrait deux suites de la suite* (u_n) *qui ne tendent pas vers une même limite. Par conséquent,* (u_n) *diverge.*
2. $u_n = \frac{2^{2n}+n3^n}{2^{2n}-n3^n} = \frac{4^n+n3^n}{4^n-n3^n} = \frac{4^n}{4^n}\dfrac{1+\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}}{1-\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}}$. *Par croissances comparées* $\frac{n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Donc :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
3. $u_n = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n} = \frac{b^n}{b^n}\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{-1+\left(\frac{a}{b}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ *car* $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ *est le terme général d'une suite géométrique de raison* $\frac{a}{b} \in \left]-1, 1\right[$.
4. $u_n = \frac{3^n-4}{3^n+2} = \frac{3^n}{3^n}\dfrac{1-\frac{4}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *par opérations sur les limites.*
5. *Pour tout réel* x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. *D'après le théorème des gendarmes :* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. $u_n = \frac{-n^2+1}{n^2+3} = \frac{n^2}{n^2}\frac{-1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ *par opérations sur les limites.*

Références